Diploma Programme
Programme du diplôme
Programa del Diploma

Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación
Nivel Superior
Prueba 2

Lunes 9 de mayo de 2022 (mañana)

2 horas

Instrucciones para los alumnos

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Conteste todas las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- Se necesita una copia sin anotaciones del **cuadernillo de fórmulas de Matemáticas: Aplicaciones e Interpretación** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es **[110 puntos]**.

2222 – 7222

Conteste **todas** las preguntas en el cuadernillo de respuestas provisto. Empiece una página nueva para cada respuesta. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento y/o en explicaciones. Junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención. Por ejemplo, si se utiliza un gráfico para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente el mismo como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. [Puntuación máxima: 13]

Scott compra comida para su perro en bolsas grandes y todos los días le da al perro la misma cantidad de comida. La cantidad de comida para perros que queda en la bolsa al final de cada día se puede modelizar mediante una progresión aritmética.

Un día concreto, Scott abrió una bolsa nueva de comida para perros y le dio de comer a su perro. Al final del tercer día quedaban en la bolsa $115{,}5$ tazas de comida para perros, y al final del octavo día quedaban en la bolsa 108 tazas de comida para perros.

(a) Halle el número de tazas de comida para perros que:

(i) Le da al perro cada día.

(ii) Quedaban en la bolsa al final del primer día. [4]

(b) Calcule el número de días que se puede alimentar al perro de Scott con una misma bolsa de comida. [2]

En 2021, Scott se gastó 625 $\$$ en comida para perros. Scott prevé que la cantidad que se gasta en comida para perros irá aumentando a un ritmo anual del $6{,}4\%$.

(c) Determine la cantidad que Scott prevé gastar en comida para perros en 2025. Redondee la respuesta al número entero de dólares más próximo. [3]

(d) (i) Calcule el valor de $\sum_{n=1}^{10}(625 \times 1{,}064^{(n-1)})$.

(ii) Describa qué representa el valor del apartado (d)(i) en este contexto. [3]

(e) Comente si resulta apropiado modelizar esta situación mediante una progresión geométrica. [1]

2. [Puntuación máxima: 15]

En una cafetería se preparan cada mañana x litros de café. Los beneficios que obtiene la cafetería cada mañana (C, en dólares) se pueden modelizar mediante la siguiente ecuación:

$$C = \frac{x}{10}\left(k^2 - \frac{3}{100}x^2\right),$$

donde k es una constante positiva.

(a) Halle una expresión para $\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}$ en función de k y x. [3]

(b) A partir de lo anterior, halle el valor máximo de C en función de k. Dé la respuesta en la forma pk^3, donde p es una constante. [4]

El encargado sabe que la cafetería obtiene unos beneficios de 426 $\$$ cuando en una mañana se preparan 20 litros de café.

(c) (i) Halle el valor de k.

(ii) Utilice el modelo para hallar cuánto café se debería preparar cada mañana en la cafetería para maximizar los beneficios obtenidos. [3]

(d) Dibuje aproximadamente el gráfico de C en función de x, rotulando el punto máximo y los puntos de corte con el eje x con sus coordenadas correspondientes. [3]

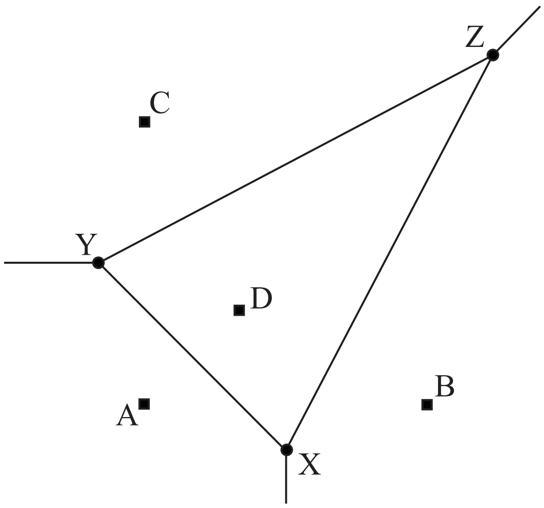
El encargado de la cafetería desea atender al mayor número posible de clientes.

(e) Determine la cantidad máxima de café que puede preparar la cafetería en una mañana sin incurrir en una pérdida de dinero. [2]

3. [Puntuación máxima: 18]

El siguiente diagrama de Voronoi muestra cuatro supermercados, que están representados por los puntos de coordenadas $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 6)$ y $D(2, 2)$. El diagrama también muestra los vértices X, Y, Z. Todas las distancias se miden en kilómetros.

la figura no está dibujada a escala



(a) Halle el punto medio de $[BD]$. [2]

(b) Halle la ecuación de (XZ). [4]

La ecuación de (XY) es $y = 2 - x$ y la ecuación de (YZ) es $y = 0{,}5x + 3{,}5$.

(c) Halle las coordenadas de X. [3]

Las coordenadas de Y son $(-1, 3)$ y las coordenadas de Z son $(7, 7)$.

(d) Determine la longitud exacta de $[YZ]$. [2]

(e) Sabiendo que la longitud exacta de $[XY]$ es $\sqrt{32}$, halle el tamaño (en grados) de $X\hat{Y}Z$. [4]

(f) A partir de lo anterior, halle el área del triángulo XYZ. [2]

Un técnico de urbanismo cree que cuanto mayor sea el área de la celda de Voronoi XYZ, más gente comprará en el supermercado D.

(g) Indique una crítica a esta interpretación. [1]

4. [Puntuación máxima: 15]

Un alumno que está investigando la relación que existe entre las reacciones químicas y la temperatura encuentra en Internet la ecuación de Arrhenius.

$$k = Ae^{-\frac{c}{T}}$$

Esta ecuación establece una relación entre la variable k y la temperatura T, donde A y c son constantes positivas y $T > 0$.

(a) Muestre que $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}T}$ siempre es positiva. [3]

(b) Sabiendo que $\lim_{T\to\infty} k = A$ y $\lim_{T\to 0} k = 0$, dibuje aproximadamente el gráfico de k en función de T. [3]

La ecuación de Arrhenius predice que el gráfico de $\ln k$ en función de $\frac{1}{T}$ es una línea recta.

(c) Escriba:

(i) La pendiente de esta recta en función de c

(ii) El punto de corte de esta recta con el eje y en función de A [4]

Se han hallado los siguientes datos para una reacción determinada, donde T se mide en kelvin y k se mide en $\mathrm{cm^3\ mol^{-1}\ s^{-1}}$:

T	k
590	5×10^{-4}
600	6×10^{-4}
610	10×10^{-4}
620	14×10^{-4}
630	20×10^{-4}
640	29×10^{-4}
650	36×10^{-4}

(d) Halle la ecuación de la recta de regresión de $\ln k$ sobre $\frac{1}{T}$. [2]

(e) Halle una estimación de

(i) c

(ii) A

Para estos valores no es necesario indicar las unidades. [3]

5. [Puntuación máxima: 12]

Un genetista utiliza un modelo de cadenas de Markov para investigar los cambios que se producen en un gen concreto de una célula a medida que esta se va dividiendo. Cada vez que la célula se divide, el gen puede mutar entre su estado normal y otros estados.

El modelo es de la forma

$$\begin{pmatrix} X_{n+1} \\ Z_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \begin{pmatrix} X_n \\ Z_n \end{pmatrix},$$

donde X_n es la probabilidad de que el gen esté en su estado normal después de que la célula se haya dividido por n-ésima vez y Z_n es la probabilidad de que esté en otro estado después de que la célula se haya dividido por n-ésima vez, con $n \in \mathbb{N}$.

Se ha hallado que la matriz $\boldsymbol{M}$ es $\begin{pmatrix} 0{,}94 & b \\ 0{,}06 & 0{,}98 \end{pmatrix}$.

(a) (i) Escriba el valor de b.

(ii) ¿Qué representa b en este contexto? [2]

(b) Halle los valores propios de $\boldsymbol{M}$. [3]

(c) Halle los vectores propios de $\boldsymbol{M}$. [3]

(d) El gen se encuentra en su estado normal cuando $n = 0$. Calcule la probabilidad de que esté en su estado normal:

(i) Cuando $n = 5$

(ii) A largo plazo [4]

6. [Puntuación máxima: 21]

En una de las pruebas de un torneo de tiro con arco se lanza una bola al aire y el arquero tiene que tratar de darle con una flecha.

La trayectoria de la bola se puede modelizar mediante la ecuación

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} u_x \\ u_y - 5t \end{pmatrix},$$

donde x es el desplazamiento horizontal respecto al arquero, y es el desplazamiento vertical respecto al nivel del suelo (ambos desplazamientos se miden en metros) y t es el tiempo (en segundos) transcurrido desde que se lanzó la bola.

- u_x es la componente horizontal de la velocidad inicial.
- u_y es la componente vertical de la velocidad inicial.

En esta pregunta, tanto la bola como la flecha se modelizan como objetos puntuales. La bola se lanza con una velocidad inicial tal que $u_x = 8$ y $u_y = 10$.

(a) (i) Halle la celeridad inicial de la bola.

(ii) Halle el ángulo de elevación de la bola mientras la lanzan. [4]

(b) Halle la altura máxima que alcanza la bola. [3]

(c) Suponiendo que el suelo es horizontal y que la flecha no da a la bola, halle la coordenada x del punto donde aterriza la bola. [3]

(d) Para la trayectoria de la bola, halle una expresión que dé y en función de x. [3]

Un arquero lanza una flecha desde el punto $(0, 2)$. Se supone que la flecha se desplaza en línea recta, en el mismo plano que la bola, con celeridad $60\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ y con un ángulo de elevación de 10°.

(e) Determine las dos posiciones en las que la trayectoria de la flecha corta a la trayectoria de la bola. [4]

(f) Determine el instante en el que habría que lanzar la flecha para que dé a la bola antes de que la bola alcance su altura máxima. [4]

7. [Puntuación máxima: 16]

Una autoridad fluvial le pide a un científico ambiental que modelice el efecto de una fuga ocurrida en una central eléctrica sobre la concentración de mercurio en un río cercano. La variable x representa la concentración de mercurio en microgramos por litro.

La situación se modeliza utilizando la siguiente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2x=0,$$

donde $t \geq 0$ es el tiempo (en días) que ha transcurrido desde que se inició la fuga. Se sabe que para $t=0$, $x=0$ y $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$.

(a) Muestre que el sistema de ecuaciones de primer orden acopladas

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-2x-3y$$

se puede escribir como la ecuación diferencial de segundo orden dada anteriormente. [2]

(b) Halle los valores propios del sistema de ecuaciones de primer orden acopladas dado en el apartado (a). [3]

(c) A partir de lo anterior, halle la solución exacta de la ecuación diferencial de segundo orden. [5]

(d) Dibuje aproximadamente el gráfico de x en función de t, rotulando el punto máximo del gráfico con sus coordenadas. [2]

Si la concentración de mercurio es mayor que $0{,}1$ microgramos por litro, se considera que la pesca en ese río no es segura y se prohíbe.

(e) Utilice el modelo para calcular el tiempo total durante el cual se debería prohibir la pesca. [3]

La autoridad fluvial decide prohibir la pesca en el río durante un tiempo un 10% mayor que el hallado con el modelo.

(f) Escriba un motivo, haciendo referencia al contexto, que respalde esta decisión. [1]

Referencias: